

### План лекции:

1. Политропные процессы
2. Работа и теплота политропного процесса
3. Исследование политропных процессов
4. Определение показателя политропы
5. Вопросы для дистанционного освоения лекции

## 1. ПОЛИТРОПНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Уравнения первого закона термодинамики для закрытой термодинамической системы, характеризуют распределение подведенной к газу (или отведенной) теплоты между его внутренней энергией и совершенной им работой.

$$dq = du + dl \quad (1)$$

В общем случае доли теплоты, расходуемые на работу и внутреннюю энергию, в термодинамическом процессе меняются в любых отношениях. В термодинамике же изучаются процессы, подчиненные определенной закономерности. В частности рассматриваются процессы, при протекании которых подводимая теплота распределяется между внутренней энергией газа и работой, которую он совершает, в постоянной пропорции.

Рассмотрим процесс, в котором на изменение внутренней энергии газа расходуется  $\phi$ -ая часть подводимой теплоты. Соотношения будем записывать для 1 кг идеального газа.

$$du = \phi dq \quad (2)$$

Уравнение первого закона термодинамики запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} dq &= \phi dq + dl \\ \text{или} & \\ dl &= (1 - \phi) dq \end{aligned} \quad (3)$$

В термодинамике процессы, подчиненные закономерности, выражаемой условием  $\phi = \text{const}$ , называются политропными (греч. многообразными). Значение  $\phi$  в политропных процессах могут быть от  $+\infty$  до  $-\infty$ .

Теплота всегда может быть выражена произведением теплоемкости на изменение температуры. Для любого политропного процесса также можно написать

$$dq = c_\phi dT \quad (4)$$

где  $c_\phi$  - теплоемкость политропного процесса.

Следовательно,

$$c_\phi = \frac{dq}{dT} = \frac{1}{\phi} \frac{du}{dT} = \frac{c_v}{\phi} \quad (5)$$

В политропном процессе идеального газа изменения параметров могут быть выражены определенными зависимостями. Получим их используя первый закон термодинамики, уравнение состояния идеального газа и свойства политропного процесса:

$$dq = c_v dT + pdv$$

$$p = \frac{RT}{v}$$

$$dq = c_\varphi dT \quad (6)$$

Подставляя  $dq = c_\varphi dT$  в уравнение первого закона термодинамики, и выражая  $dT$  из уравнения состояния идеального газа  $dT = (pdv + vdp)/R$ , получим следующее соотношение:

$$(c_\varphi - c_v) dT = pdv$$

$$(c_\varphi - c_v)(pdv + vdp) = R \cdot pdv$$

$$(c_\varphi - c_v - R)pdv + (c_\varphi - c_v)vdp = 0 \quad (7)$$

$$(c_\varphi - c_p)pdv + (c_\varphi - c_v)vdp = 0$$

$$\frac{c_\varphi - c_p}{c_\varphi - c_v} \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0$$

Введём обозначение  $n = (c_\varphi - c_p)/(c_\varphi - c_v) = \text{const}$ , тогда из уравнения (7) получим:

$$\boxed{n \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0} \quad (8)$$

Проведём интегрирование данного выражения:

$$n \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

$$\ln(v_2^n) - \ln(v_1^n) = \ln(p_1) - \ln(p_2) \quad (9)$$

$$\ln(p_1 v_1^n) = \ln(p_2 v_2^n)$$

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n$$

**Таким образом, для политропного процесса всегда выполняется условие:**

$$pv^n = \text{const} \quad (10)$$

Используя уравнение состояния идеального газа, можно перейти к записи данного условия через температуру и удельный объём газа:

$$Tv^{n-1} = \text{const}, \quad (11)$$

или через давление и температуру:

$$\frac{T^n}{p^{n-1}} = \text{const} \quad (12)$$

Таким образом, зависимости, выражающие изменения параметров газа в политропном процессе, определяются введенной нами величиной  $n$ ; эта величина называется **показателем политропы** и для каждого процесса постоянна.

## 2. РАБОТА И ТЕПЛОТА ПОЛИТРОПНОГО ПРОЦЕССА

Из определения общего интеграла работы:

$$l = \int_1^2 p dv \quad (13)$$

для политропного процесса можно получить:

$$l = \int_1^2 \frac{p_1 v_1^n}{v^n} dv \quad (14)$$

Интегрирование даёт следующее соотношение для работы политропного процесса:

$$l = p_1 v_1^n \int_1^2 v^{-n} dv = p_1 v_1^n \left( \frac{v_2^{1-n} - v_1^{1-n}}{1-n} \right) \quad (15)$$

или

$$l = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1-n}$$

Используя уравнение состояния идеального газа выражение (15), можно преобразовать к виду:

$$l = \frac{R(T_2 - T_1)}{1-n}, \quad (16)$$

или через отношение давлений:

$$l = \frac{RT_1}{n-1} \left( 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right). \quad (17)$$

Последнее соотношение часто используется в газодинамике и теории турбин.

Теплота, подводимая в ходе политропного процесса, может быть легко определена исходя из теплоёмкости политропного процесса.

$$\begin{aligned} dq &= c_\phi dT \\ dq &= c_v \frac{n-k}{n-1} dT \end{aligned} \quad (18)$$

или

$$q = c_v \frac{n-k}{n-1} (T_2 - T_1)$$

## 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛИТРОПНЫХ ПРОЦЕССОВ

Зависимости между параметрами, характеризующими процесс, могут быть определены или по заданному значению  $\phi$ , или по известной величине показателя политропы  $n$ , или по известному значению теплоёмкости процесса  $c_\phi$ .

Основное значение для последующего изложения имеет показатель политропы  $n$ .

Исследование процессов при разных значениях  $n$  приводит к некоторым частным случаям политропных процессов, особо выделяемым при анализе термодинамических процессов.

### Изобарный процесс.

$$pv^n = pv^0 = p = \text{const} \quad (19)$$

Таким образом, политропный процесс с показателем  $n=0$  протекает при постоянном давлении; этот процесс называется изобарным. Следовательно, меняются в процессе только температура газа и его объем, причем из уравнения состояния находим:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (20)$$

Работа газа в изобарном процессе определяется из выражений (15) и (16) как:

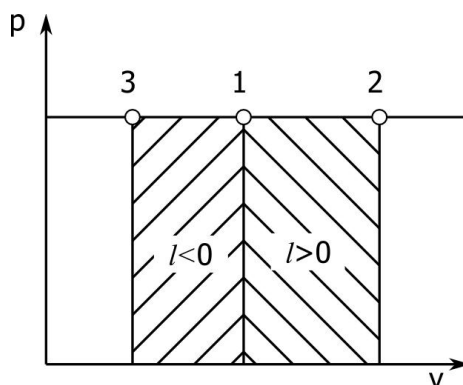
$$\begin{aligned} l &= p(v_2 - v_1) \\ \text{или} \\ l &= R(T_2 - T_1) \end{aligned} \quad (21)$$

Теплота из уравнения (18) равна:

$$q = c_p(T_2 - T_1) = h_2 - h_1, \quad (22)$$

т.е. подведённая теплота в изобарном процессе равна изменению энтальпии газа.

На  $p-v$  диаграмме изобарный процесс изображается прямой линией параллельной оси абсцисс. Если газ в процессе испытывает расширение, то его работа положительна, если сжатие то отрицательна.



### Изотермический процесс.

$$pv^1 = pv = RT = \text{const} \quad (23)$$

Политропный процесс с показателем  $n=1$  протекает при постоянной температуре; этот процесс называется изотермическим. Следовательно, меняются в процессе только давление газа и его объем:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (24)$$

В этом процессе объемы газа меняются обратно пропорционально давлениям (закон Бойля—Мариотта)

Работа газа в изотермическом процессе определяется как:

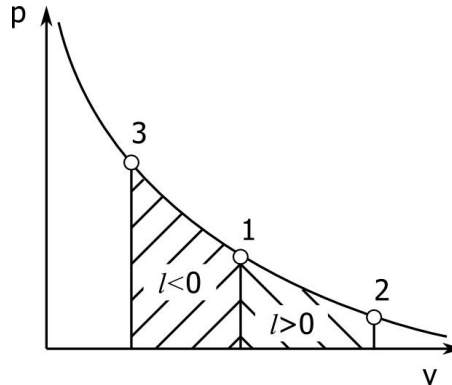
$$l = \int_1^2 \frac{RT}{v} dv = RT \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right) = RT \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \quad (25)$$

Исходя из теплоёмкости политропного процесса, в изотермическом процессе теплоёмкость равна:

$$c_{\phi} = c_v \frac{n-k}{n-1} = c_v \frac{1-k}{1-1} = \pm\infty, \quad (26)$$

т.е. ни при каких конечных значениях теплоёмкости температура газа не может быть изменена, т.к. вся подводимая теплота расходуется на совершение работы.

На  $p-v$  диаграмме кривая процесса представляется уравнением  $pv = \text{const}$ , т.е. гиперболой, для которой оси координат являются асимптотами. Так как произведение  $pv$  увеличивается при увеличении температуры, то изотерма тем дальше отстоит от начала координат, чем более высокую температуру она представляет.



Так как температура в процессе не меняется, то внутренняя энергия газа также остается постоянной и  $du = 0$ . Следовательно, уравнение первого закона термодинамики для этого процесса имеет вид:

$$dq = dl, \quad (27)$$

или вся подведенная теплота превращается в работу расширения газа и обратно, вся работа, затраченная на сжатие газа, должна быть отведена в окружающую среду в форме теплоты.

### Адиабатный процесс.

Если показатель политропы  $n = c_p/c_v = k$ , то из выражения (18) находим, что теплота, подводимая в процессе, равна нулю.

$$q = c_v \frac{n-k}{n-1} (T_2 - T_1) = c_v \frac{k-k}{k-1} (T_2 - T_1) = 0 \quad (28)$$

Следовательно, этот политропный процесс происходит без обмена теплотой с окружающим пространством. Такой процесс называется адиабатным. Из уравнения первого закона термодинамики находим при  $dq = 0$ :

$$du = -dl$$

или

$$l = c_v (T_1 - T_2), \quad T_1 > T_2 \quad (29)$$

В этом процессе **вся совершаемая газом работа получается за счет уменьшения его внутренней энергии** и, наоборот, вся работа, затраченная на сжатие газа, идет на увеличение внутренней энергии.

Формулы связи между параметрами газа в адиабатном процессе и формулы работы получаются из общих формул политропного процесса при условии замены в них  $n$  на  $k$ .

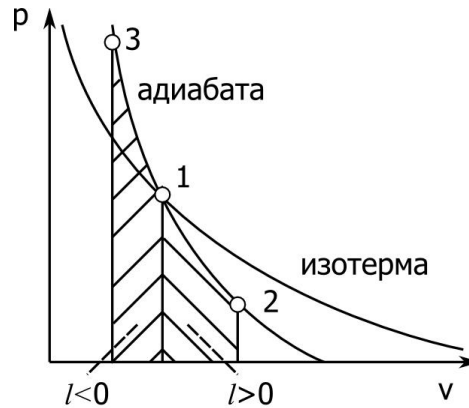
$$pv^k = \text{const} \quad (30)$$

$$l = \frac{R(T_1 - T_2)}{k - 1}$$

или

$$l = \frac{p_1 v_1}{k - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \quad (31)$$

Адиабата, представляя собой гиперболу высшего порядка (так как  $k > 1$ ), на  $p-v$  диаграмме изображается более крутой кривой, чем изотерма.



### Изохорный процесс.

Если показатель политропы  $n = \pm\infty$ , то общую зависимость между давлениями и объемами в политропном процессе можно представить в виде:

$$\begin{aligned} (pv^n)^{1/n} &= (\text{const})^{1/n} \\ p^{1/n} v &= p^0 v = v = \text{const} \end{aligned} \quad (32)$$

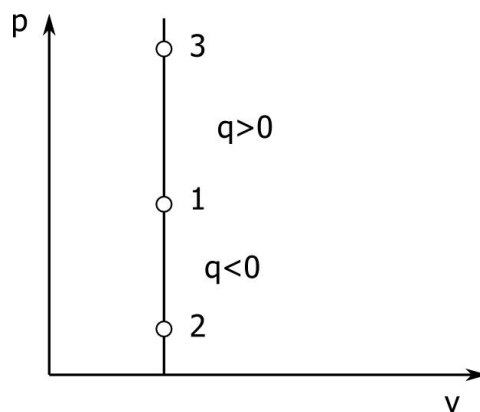
Таким образом, при показателе политропы  $n = \pm\infty$  политропный процесс происходит при постоянном объеме. Такой процесс называется изохорным. Из уравнения состояния для изохорного процесса находим:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (33)$$

Так как  $dv = 0$ , то газ в этом процессе работы не производит и уравнение первого закона термодинамики приводится к виду:

$$\begin{aligned} dq &= du \\ q &= c_v (T_2 - T_1) \end{aligned} \quad (34)$$

На  $p-v$  диаграмме изохора представляется прямой, параллельной оси давлений. Направление процесса из начальной точки характеризует увеличение внутренней энергии и нагрев газа, а вниз - охлаждение путем отвода теплоты в окружающую среду.



#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ ПОЛИТРОПЫ

На практике иногда приходится определять значение показателя политропы для заданной кривой, представленной на  $p-v$  диаграмме. На диаграмме может быть представлена кривая с разными показателями политропы на разных участках, но тем не менее можно определить среднее значение показателя политропы для всей кривой в целом. Для этого используем уравнение:

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n \quad (35)$$

Отсюда:

$$n = \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{\ln \frac{v_1}{v_2}} \quad (36)$$

## 5. ВОПРОСЫ ДЛЯ ДИСТАНЦИОННОГО ОСВОЕНИЯ ЛЕКЦИИ

1. Запишите связь между удельной массовой теплоёмкостью политропного процесса и удельной массовой теплоёмкостью изохорного процесса.
Ответ:
2. Запишите основное свойство политропного процесса через давление и удельный объём.
Ответ:
3. Какая последовательность значений показателей политропы для изобарного, изотермического, адиабатного и изохорного процессов является верной: 0, 1, k, ∞; 1, 1.33, 1.4, 1.67; -∞, 0, 1, k,
Ответ:
4. Являются ли изохорный и изобарный процессы частными случаями политропного процесса.
Ответ:
5. Запишите формулу для определения показателя политропы по известным значениям давлений и удельных объёмов в начале и в конце процесса.
Ответ:
Фамилия Имя Отчество:
Группа:
Подпись:
Дата: